

Esercizio 1* (Una funzione C^∞ la cui serie di Taylor ha raggio di convergenza nullo)

$$\text{Sia } f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \cos(nx).$$

(i) Si dimostri che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

[Suggerimento: si usi [il Lemma 5.22 di questo file](#)].

(ii) Si calcoli la serie di Taylor in $x_0 = 0$ di f .

$$[\text{Risposta: } \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} \text{ con } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} k^{2n}]$$

(iii) Dimostrare che il raggio di convergenza della serie di Taylor è 0, ossia, che $\overline{\lim} |a_{2n}|^{1/2n} = +\infty$.

$$[\text{Suggerimento: } |a_{2n}| \geq e^{-n} \frac{n^{4n}}{(2n)!}]$$

Esercizio 2 (Generalizzazione della formula di Leibniz per la derivata del prodotto)

Siano f e g due funzioni derivabili n volte in x dimostrare che vale la seguente formula

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g, \quad (\text{tutto calcolato in } x).$$

[dimostrazione per induzione analoga alla dimostrazione del binomio di Newton]

Esercizio 3* (La serie di Taylor della tangente) La serie di Taylor di $\tan x$ non si esprime in una forma “chiusa” semplice ma è possibile dare formule ricorsive per i suoi coefficienti.

(i) Calcolare il polinomio $P_5(x)$ di ordine 5 di $\tan x$ in $x_0 = 0$.

$$[\text{Risposta: } P_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5]$$

(ii) Sia $f(x) := \tan x$; si denoti con D_0^k la derivata n -ma calcolata in $x = 0$ e si ponga

$$\alpha_k := \frac{D_0^{2k+1} f}{(2k+1)!} := \frac{(D^{2k+1} \tan x)(0)}{(2k+1)!}.$$

Si dimostri che, per ogni $n \geq 0$,

$$D_0^{2n+1}(f \cos x) = (2n+1)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha_{n-k},$$

e (poiché $f \cos x = \sin x$) dedurre che

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{2n+1}, \quad \text{con: } \alpha_0 = 1, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha_{n-k}, \quad (n \geq 1). \quad (1)$$

(iii) Calcolare il polinomio $P_7(x)$ di ordine 7 di $\tan x$ in $x_0 = 0$ usando la (1).

$$[\text{Risposta: } P_7(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7]$$

(iv) Dimostrare (per induzione) che $0 < \alpha_n \leq 1$ per ogni n e dedurre che il raggio di convergenza della serie di Taylor è maggiore o uguale a¹ 1.

¹Si può dimostrare (usando l'analisi complessa) che $R = \pi/2$.